Chapitre 1

Intégrale sur $[a, b]$

Définition : *Soit $I = [a, b]$ un intérvale de $\mathbb{R}$ avec a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ (a<b), on appelle subdivision de $[a; b]$ toute famille finie :*

$$x_0 = a < x_1 < ...... < x_k < ..... < x_n = b$$

Dans ce cas on note $\delta_n = \max\{(x_{i+1} - x_i)/i = 1; 2; .....; n-1\}$ et on l'appelle le pas de la subdivision .

Exemple :

1. Prenons le cas de $I = [0, 1]$.
   - $x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2} < x_2 = 1$ est une subdivision de I et il est claire que son pas est égale a $\delta = \frac{1}{2}$
   - $x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = \frac{3}{4} < x_4 = 1$ est une autre subdivision du même intérvale I mais cette fois le pas est égale a $\delta = \frac{1}{3}$
   - $x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < x_3 = \frac{3}{n} < x_4 = \frac{4}{n} < ..... < x_n = \frac{n}{n} = 1$ est une sudivision de I avec le pas $\delta = \frac{1}{n}$
2. Dans le cas ou $I = [a, b]$, on peut considérer la subdivision uniforme suivante :
   $x_0 = a < x_1 = a + .\frac{b-a}{n} < x_2 = a + 2.\frac{b-a}{n} < x_3 = a + 3.\frac{b-a}{n} ...... < x_k = a + k.\frac{b-a}{n} < .... < x_n = b$ c'est une subdivision uniforme de I dont le pas $\delta_n = \frac{1}{n}$

Fonction en escalier :

Définition :

On appelle fonction en escalier sur $I = [a, b]$ toute fonction $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que il éxiste une subdivision $x_0 = a < x_1 < ...... < x_n = b$ de $[a, b]$ avec :

$$\varphi/]x_{i-1}, x_i[= \lambda_i = constante$$

pour tout $i = 1; 2; ...; n$.

Définition :

Soit $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors on définie l'intégrale de ϕ sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i - x_{i-1})$$

Définition :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction , $x_0 = a < x_1 < ...... < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ donnée ; avec le pas δ_n .
Dans chaque intérvale $[x_{p-1}, x_p]$ On choisit un élément ξ_p.
On appelle somme de Riemann de f relativement a la subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n-1}$, au pas δ_n, et au éléments $(\xi_p)_p$ la quantité :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} (x_p - x_{p-1}).f(\xi_p)$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si : quand $\delta_n \to 0$ (le pas tend vers zéro) la suite S_n tend vers une limite finie notée : $\int_a^b f(x)dx$

Propriétés :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a les propriétés suivantes :

1. $\int_a^b (f + \lambda g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx.$
2. Si $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

3. Si $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
4. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b \mid f(x) \mid dx$
5. Relation de Chasle :por tout $a < c < b$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
7. $\int_a^a f(x)dx = 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$

Théorème :

Toute fonction continue sur un intérvale $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann .

Somme de Riemann pour les fonctions continues :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; alors les deux suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k.\frac{(b-a)}{n}), et, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k.\frac{(b-a)}{n})$$

sont convérgentes vers la même limite ;et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Exemples :

1. Calculer la limite de la suite suivante .

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n.\sqrt{n}}$$

Il est claire qu'on a pas a faire a une suite ordinaire :
En effet $u_n = \frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{\frac{n}{n}})$ est une suite de Riemann et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

2. Calculer la limite de la suite suivante :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{p}{\sqrt{n^2+p^2}}$$

De la même manière que précedement cette suite est une somme de Riemann car

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{\frac{p}{n}}{\sqrt{1+(\frac{p}{n})^2}}$$

pour la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $a + p\frac{b-a}{n} = \frac{p}{n}$ et donc $a = 0$ et $b = 1$ et donc ona $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2}-1$

Primitive :

Soit f une fonction définie sur un intérvale I , une fonction F est dite une primitive de f sur I si et seulement si :
1) F est dérivable sur I.
2) $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Notation :

Dans ce cas on note

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Remarque :

Si G est une autre primitive de f sur I alors $F - G = const.$

Proposition :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Proposition :

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, alors la fonction $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a, b]$.

Primitives usuelles :

1. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$.
2. $\int \frac{1}{x}dx = Ln(|x|) + c$

3. $\int cos(x)dx = sin(x) + c.$
4. $\int sin(x)dx = -cos(x) + c$
5. $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arctg(x) + C$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = Arcsin(x) + C$
7. $\int -\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = Arccos(x) + C$

Exemple :

Calculer $I = \int_{-1}^{1} x|x|dx$

On a $I = -\int_{-1}^{0} x^2dx + \int_0^1 x^2dx = -\frac{1}{3}[\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{0} + \frac{1}{3}[\frac{1}{3}x^3]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$

Théorème de la moyenne :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continue , avec* $f(x) > 0$ *sur* $[a, b]$ *; alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que :*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt$$

Démonstration :

puisque g est continue sur $[a, b]$ alors il existe m et M dans $\mathbb{R}$ tel que $g([a, b]) = [m, M]$ avec $m = min\{g(x)/x \in [a, b]\}$ et $M = max\{g(x)/x \in [a, b]\}$.

Donc pour pour tout $x \in [a, b]$ on a $m \leq g(x) \leq M$ et par suite on a :

$m\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M\int_a^b f(t)dt.$

Et par conséquence $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} \in [m, M]$, ce qui implique l'éxistence d'un c dans $[a, b]$ tel que :

$$g(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}$$

Intégration par partie :

Proposition :

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$, alors on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Démonstration :

On pose : $F(x) = \int_a^x u'(t)v(t)dt$ et $G(x) = u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u(t)v'(t)dt$.

Alors on a : $F(a) = 0$ et $G(a) = 0$

De plus $G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x)$

et $F'(x) = u'(x)v(x)$.

Donc $F = G + constante$ et puisque $G(a) = F(a) = 0$ alors la constante est nulle .

Donc $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ en particulier pour b .

Remarque :

La démonstration qu'on vient de faire est valable aussi pour les primitives et on a la proposition suivante :

Proposition :

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors on a :

$$\int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)dt$$

Exemple :

Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $I = \int \ln(t)dt.$
2. $J = \int_1^2 t\ln(t)dt.$
3. $K = \int_0^1 \arctan(t)dt.$

Pour 1) on pose $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$ et donc

$$\int \ln(t)dt = t\ln(t) - \int t.\frac{1}{t}dt = t\ln(t) - t + c$$

. Pour 2) ona :

$$J=\int_1^2 t\ln(t)dt=[\frac{1}{2}t^2\ln(t)]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}t^2.\frac{1}{t}dt=2Ln(2)-\frac{3}{4}$$

Pour 3 On a :

$$\int_0^1 \arctan(t)dt=[x.arctg(x)]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}[Ln(1+x^2]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Ln(2)$$

Changement de variable :

Proposition :

Soit $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue , alors on a :

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(u)du=\int_\alpha^\beta f(\phi(t)).\phi'(t)dt$$

Démonstration :

On pose $F(x)=\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(u)du=$ et $G(x)=\int_\alpha^x f(\phi(t)).\phi'(t)dt$.

On a alors $F(\alpha)=0$ et $G(\alpha)=0$

De plus on a : $G'(x)=f(\phi(x)).\phi'(x)$ et $F'(x)=f(\phi(x)).\phi'(x)$ et donc $F=G$

Remarque :

Si ϕ est bijective alors :

$$\int_a^b f(u)du=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Exemple :

1. Calculer $I=\int_0^1\sqrt{1-t^2}dt$.
2. Calculer $J=\int\frac{sin(x)}{1+cos^2(x)}dx$.

Pour la première on pose le changement de variable $t=sin(x)$ donc $dt=cos(x)dx$.

Donc $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2(x)dx$ et puisque $cos^2(x)=\frac{1+cos(2x)}{2}$, alors on a :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}+\frac{cos(2x)}{2})dx=\frac{1}{2}([x]_0^{\frac{\pi}{2}})+\frac{1}{4}[sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

Pour la deuxième intégrale on fait le changement de variable suivant :
$u = cos(x) \Leftrightarrow du = -sin(x)dx$ et donc on a :
$J = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\arctan(u) + c = -\arctan(cos(x)) + c.$

Téchniques de calcules :

Pour calculer une intégrale on a toujours le problème de savoir quel méthode utilisée , est ce que un changement de variable (il y'en beaucoups) ou une intégration par partie ou d'autres ; dans la suite on va donner une série de méthodes concérnant certaines classe de fonctions :

1. **Intégrale d'une fraction rationnelle :**$\frac{P}{Q}$.
   On procède par étapes ;
   -1er Etape :
   Si $deg(P) \geq deg(Q)$; on fait d'abord une division Euclidiènne et donc ona :$P = E.Q + R$
   Donc on a : $\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$; avec ; $deg(R) < deg(Q)$
   -2eme Etape :
   On fait la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[x]$ de $\frac{R(x)}{Q(x)}$.
   Exemple 1 :
   Calculer $I = \int \frac{x-1}{x^3+4x}$
   Dans cet exemple on passe diréctement a la deuxième étape :
   $$f(x) = \frac{x-1}{x^3+4x} = \frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+4}$$
   Calcule de a, b, et c :
   $xf(x) = \frac{x-1}{x^2+4} = a + \frac{x(bx+c)}{x^2+4}$ et on donne a x la valeur 0 donc $a = \frac{-1}{4}$.
   $\lim_{x \to 0} xf(x) = 0 = a + b$ et donc $b = \frac{1}{4}$.
   Et puis $f(1) = 0 = a + \frac{b+c}{5} \Rightarrow c = 1$.
   donc
   $$I = \int \frac{-1}{4x}dx + \int \frac{x+4}{4(x^2+4)} = \frac{-1}{4}\ln(|x|) + \frac{1}{8}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1}$$
   et donc $I = \frac{-1}{4}\ln(|x|) + \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + c$
   Exemple 2 :
   Calculer $J = \int \frac{dx}{x^3-x^2}$
   On pose $g(x) = \frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$

Et on calcul a, b, c
$x^2 g(x)/x = 0 \Rightarrow b = -1$
$(x-1)g(x)/x = 1 \Rightarrow c = 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x) = 0 = a + c \Rightarrow a = -1$
Donc

$$J = \int (\frac{-1}{x} - \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1})dx = -\ln(|x|) + \frac{1}{x} + \ln(|x-1|) + c$$

Exemple 3 :
Calculer $K = \int \frac{x^4+x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4}dx$
On fait d'abord une division Euclidienne et on trouve :

$$\frac{x^4+x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4} = x - 5 + \frac{18x^2+36x+24}{x^3+5x^2+8x+4}$$

et $x^3+5x^2+8x+4 = (x+1)(x+2)^2$
Et on va décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{18x^2+36x+24}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

Et aprés calcules on trouve :

$$\frac{x^4+x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4} = x - 5 + \frac{6}{x+1} + \frac{12}{x+2} + \frac{-24}{(x+2)^2}$$

Et en fin :

$$K = \frac{1}{2}.(x-5)^2 + 6\ln(|x+1|) + 12\ln(|x+2|) + \frac{24}{x+2} + c$$

Exemple 4 :
Calculer $T = \int \frac{dx}{x^3+1}$
Tout d'abord on remarque que $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$
Donc on décompose en éléments simples la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

Et aprés un petit calcule on trouve :

$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$
Et $\frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} = \frac{-1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1}$
Et de meme

$$\frac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

Donc $T = \frac{1}{3}\int(|x+1) - \frac{1}{6}\ln(|x^2-x+1|) + \frac{2}{3}\int\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}dx$
et on posant le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}.x - \frac{1}{\sqrt{3}}$
On trouve :

$$T = \frac{1}{3}\ln(|x+1) - \frac{1}{6}\ln(|x^2-x+1|) + \frac{\sqrt{3}}{3}.\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}) + c$$

2. **Intégrale d'un polynôme en** $Sin(x)$ **et** $Cos(x)$.
On se ramène au cas :

$$I_{p,q} = \int cos^p(x)sin^q(x)dx$$

avec p ,et q deux éléments de $\mathbb{N}$ et Il ya 3 cas a envisagé :
Si $p = 2k+1$ **impaire :**
$I_{p,q} = \int(cos^2(x))^k sin^q(x)cos(x)dx = \int(1-sin^2(x))^k sin^q(x)cos(x)dx$
Dans ce cas on pose le changement de variable $u = sin(x)$ et donc .

$$I_{p,q} = \int(1-u^2)^k u^q du$$

Exemple :
Calculer $I = \int cos(x)sin^2(x)dx$
on pose $u = sin(x)$ donc $du = cos(x)dx$ et par suite
$I = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}sin^3(x) + c$
Si $q = 2k+1$ **impaire :**
$I_{p,q} = \int(sin^2(x))^k cos^p(x)sin(x)dx = \int(1-cos^2(x))^k cos^q(x)sin(x)dx$
Dans ce cas on pose le changement de variable $u = cos(x)$ et donc .

$$I_{p,q} = \int(1-u^2)^k u^q du$$

Exemple :
Calculer $J = \int cos^4(x)sin^3(x)dx$
Il est claire ici qu'on va poser $u = sin(x)$ donc $du = cos(x)dx$, et donc $J = \int u^4(1-u^2)du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + c$
Donc

$$J = \frac{1}{5}sin^5(x) - \frac{1}{7}sin^7(x) + c$$

Si p et q tout les deux paire :
Alors dans ce cas on est obliger de faire une linéarisation .
Exemple :
Calculer :$I = \int cos^2(x)sin^2(x)dx$
Dans ce cas on a : $cos(x).sin(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$ donc $cos^2(x)sin^2(x) = \frac{1}{4}sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - cos(4x))$
Et donc $I = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sin(4x) + c$

3. **Primitive de la forme** : $\int F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, **avec** $ad - bc \neq 0$.
On pose le changement de variable :

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Leftrightarrow y^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \frac{dy^n - b}{a - cy^n}$$

Exemple :
Calculer $I = \int \sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}.\frac{dx}{2x-1}$.
Alors on pose le changement de variable :

$$y = \sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} \Leftrightarrow x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \Leftrightarrow dx = \frac{4ydy}{(1+y^2)^2}$$

Ce qui donne :

$$I = \int \frac{4y^2dy}{(y^2-3)(y^2+1)}$$

Et en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{4u}{(u-3)(u+1)} = \frac{3}{u-1} + \frac{1}{u+1} \Rightarrow \frac{4y^2dy}{(y^2-3)(y^2+1)} = \frac{3}{y^2-1} + \frac{1}{y^2+1}$$

Donc $I = \int \frac{3}{y^2-3}dy + \int \frac{dy}{y^2+1}$ et le réste est évident .

4. **Intégrale de la forme** $\int F(cos(x), sin(x))dx$:.
Pour le calcule de ce genre de primitives ou intégrales il ya plusieures changement de variable possibles le plus important est peutêtre :

$$t = tg(\frac{x}{2}) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt; .sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}; .cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Exemple :
Calculer $I = \int \frac{1}{2+cos(x)}dx$
D'apres le changement de variable précédent on a :
$I = \int \frac{2dt}{3+t^2}$.

Formule de WALLIS :
Il s'agit de la formule suivante :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx$$

On vois facilement que $J_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_1 = 1$
Soit n un entier strictement supérieur à 1.
On intégre par partie et on a :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1}(x)sin(x)dx = [cos(x)sin^{n-1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)sin^{n-2}(x)dx$$

Donc

$$J_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-sin^2(x))sin^{n-2}(x)dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx$$

Et enfin on a : $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$ Alors en utilisant cette formule on trouve facilement :

$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}............\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$J_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-5}{2n-4}.............\frac{4}{5}\frac{2}{3}.1$$

Fonction définie par une intégrale :

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue , avec I un intérvale de $\mathbb{R}$; et u ; v deux fonctions définies de $J \to I$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose alors :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

Alors G est une fonction dérivable sur I et on a :

$$G'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Démonstration :

En effet soit F une primitive quelconque de f sur I , alors on a :

$$G(x) = [F(t)]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$$

Et donc

$$G'(x) = F'(v(x)).v'(x) - F'(u(x)).u'(x) = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x)$$

Exemple :

Etudier les fonctions suivantes :

1. $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ et
2. $I(x) = \int_0^{sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})dt$

1] La fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$; donc intégrable sur tout intérvale ferlé du type $[a, b]$, en particulier sur $[x, x^2]$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Ce qui entraine que le domaine de définition de G est $D_G = \mathbb{R}$.

D'autre part les fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$G'(x) = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ce qui donne :

$$G'(x) = \frac{3}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+4x^2}(2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2})}$$

2] Les fonctions $\arcsin(\sqrt{t})$ et $\arccos(\sqrt{t})$ sont continues sur $[0, 1]$; donc sont intégrables sur $[0, sin^2(x)]$ et sur $[0, cos^2(x)]$ respectivement pour tout x dans $\mathbb{R}$, donc le domaine de définition de la fonction I est $\mathbb{R}$.
De plus il est facile de vérifier que I est paire et périodique de période $T = \pi$.
En effet $I(-x) = I(x)$ car $sin^2(-x) = sin^2(x)$ et $cos^2(-x) = cos^2(x)$.
Et :

$$sin^2(x + \pi) = (-sin(x))^2 = sin^2(x)$$

$$cos^2(x + \pi) = (-cos(x))^2 = cos^2(x)$$

Donc on réduit le domaine d'étude à l'intérvale $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Soit F une primitive de $\arcsin(\sqrt{t})$ et G une primitive de $\arccos(\sqrt{t})$.
Alors :$I(x) = F(sin^2(x)) - F(0) + G(cos^2(x)) - G(0)$.
Donc :

$$I'(x) = F'(sin^2(x)).2cos(x).sin(x) - G'(cos^2(x)).2cos(x).sin(x)$$

donc

$$I'(x) = sin(2x)[\arcsin(|sin(x)|) - \arccos(|cos(x)|)]$$

Et puisque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $sin(x)$ et $cos(x)$ sont positifs alors :

$$I'(x) = sin(2x)[\arcsin(sin(x)) - \arccos(cos(x))] = sin(2x)(x - x) = 0$$

Donc I est constante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, et cette constante est égale :

$$I(x) = I(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos(\sqrt{t})dt$$

donc

$$I(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin(\sqrt{t})dt + \arccos(\sqrt{t}))dt$$

or pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$I(x) = \frac{\pi}{4}$$

Chapitre 2

Intégrale généralisée

Définition 1 **:**
Soit $I = [a, b[$ *avec* ($b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty$), $f : I \to \mathbb{R}$, *une fonction localement intégrable sur* I *c.a.d intégrable sur tout intérvale* $[a, x] \subset I$.
Pour $a < x < b$ *on pose* $\psi(x) = \int_a^x f(t)dt$ *; si* $\lim_{x \to b} \psi(x) = l$ *existe* $(\in \mathbb{R})$ *; on dit que* $\int_a^b f(t)dt$ *converge , et on écrit tout simplement* $\int_a^b f(t)dt = l$
Dans le cas contraire on dit que $\int_a^b f(t)dt$ *est divérgente.*

Exemples

- $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge .
  On effet $\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin(x)]_0^\alpha = \arcsin(\alpha)$
  Et puisque $\lim_{\alpha \to 1} \arcsin(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ alors I converge et on a $I = \frac{\pi}{2}$
- $J = \int_1^2 \frac{dt}{(t-2)^2}$ diverge .
  Si$1 < x < 2$ alors $\psi(x) = \int_1^x \frac{1}{(t-2)^2} dt = [\frac{-1}{t-2}]_1^x = \frac{-1}{x-2} - 1$
  Et donc si $x \to 2^-$ alors $\psi(x) \to +\infty$
- $K = \int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge .
  On effet $K = \lim_{\alpha \to 0} [\ln(t)]_\alpha^1 = +\infty$
- $L = \int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ diverge.

En effet
$$L = \lim_{\alpha\to 0}[\frac{-1}{t}]_{\alpha}^{1} = \lim_{\alpha\to 0}(-1+\frac{1}{\alpha}) = +\infty$$

Théorème 1 :
On pose $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *Alors on a les deux situations suivantes :*

1. Si $\alpha < 1 \Rightarrow I(\alpha)$ converge .
2. Si $\alpha \geq 1 \Rightarrow I(\alpha)$ diverge .

Démonstration :
Si $\alpha = 1$ c'est l'exemple 3 l'intégrale est divergente .
Si $\alpha \neq 1$ deux situations se présentent :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{X\to 0}[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_X^1 = \lim_{X\to 0}(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{X^{1-\alpha}}{1-\alpha})$$

Et donc :
$$I(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & si \quad 1-\alpha>0 \\ +\infty & si \quad 1-\alpha\leq 0 \end{cases}$$

Conséquence 1 :
Soit a un réel strictement positif; alors on a :

$$\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}dt \qquad converge \qquad \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Démonstration :
même téchniques que le théorème précédent .
Conséquence 2 :
Soient a et b deux réels alors ona :
$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$, convérge , si et seulement si $\alpha < 1$
Démonstration :
Soit $a < x < b$ et $\psi(x) = \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ on pose alors $u = b-t$ et donc $du = -dt$ ce qui donne :
$$\psi(x) = -\int_{b-a}^{b-x} \frac{du}{(u)^\alpha} = \int_{b-x}^{b-a} \frac{du}{u^\alpha}$$
Et on faisant tendre x vers b on a :
$I = \int_0^{b-a} \frac{du}{u^\alpha}$ est convérgente si et seulement si $\alpha < 1$ d'apres la conséquence

1.

Théorème 2 :
Soit $\beta \in \mathbb{R}$ *on pose* $I(\beta) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ *alors on a :* $I(\beta)$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$

Démonstration :
Si $\beta = 1$ alors on a :

$$I(1) = \lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{dt}{t} = \lim_{X \to +\infty} [ln(t)]_1^X = \lim_{X \to +\infty} (ln(X)) = +\infty$$

Si $\beta \neq 1$ Alors on a :

$$I(\beta) = \lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{dt}{t^\beta} = \lim_{X \to +\infty} [\frac{1}{1-\beta} t^{1-\beta}]_1^X = \lim_{X \to +\infty} (\frac{1}{1-\beta} X^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta})$$

Et donc $I(\beta) = +\infty$ si $1 - \beta > 0$ et $I(\beta) = -\frac{1}{1-\beta}$ si $1 - \beta < 0$.

Exemples

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$ est divérgente car $\frac{1}{3} < 1 (\sqrt[3]{t} = t^{\frac{1}{3}})$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt[3]{t}}$ est convergente car $\frac{4}{3} > 1$

Théorème 3 :
Soient f *et* g *deux fonctions positives sur* $I = [a, b[$ *localements intégrables sur* I *et telles que :*

$$\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$$

Alors on a les affirmations suivantes :

1. *Si* $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *converge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge .*
2. *Si* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *diverge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *diverge .*

Exemples

1. Etudier la nature de l'intégrale généralisée : $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^2}$.
   On remarque facilement que $0 \leq \frac{1}{x+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x > 0$.
   Et puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ convérge car $2 > 1$ il en résulte que I converge .

2. Etudier la nature de l'intégrale généralisée :$J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

   De la meme facon que dans 1 on va majoree la fonction $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ par une fonction dont l'intégrale généralisée est convérgente :

$$x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} \leq e \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{e}{x^2}$$

   Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge $\Rightarrow J$ converge.

3. Etudier la nature de l'intégrale généralisée :$K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$.

   On pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ qui est une fonction positive .
   Si $x \geq 1$ alors $\sqrt{x} \geq 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ et donc $f(x) \leq e^{-x}$.
   Or $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^{+\infty} = 1$ converge , donc K converge.

Remarque
La condition f et g positives est une condition nécessaire .
Donc avant d'utiliser ce critère il faut s'assurer que les fonctions sont positives
.

Théorème 4 **:**
Soient a et b deux reels et $I = [a, b[$; $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et localement intégrable . On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \to b} (b - x)^r f(x) = l \in \mathbb{R}^+$$

Alors on a :

1. *Si $r < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ converge .*
2. *Si $r \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ diverge .*

Exemples :

1. Etudier la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_0^1 \frac{|ln(x)|}{\sqrt{x}} dx$

   Le problème se pose en 0 , avec $f(x) = \frac{|ln(x)|}{\sqrt{x}}$, et on a :

$$\lim_{x \to 0} (x - 0)^r f(x) = \lim_{x \to 0} (x)^{r - \frac{1}{2}} |ln(x)| = 0$$

Pour tout $r - \frac{1}{2} > 0$

En particulier on peut choisir un r qui vérifie a la fois $r - \frac{1}{2} > 0$ et $r < 1$ par exemple $r = \frac{2}{3}$ (en réalite tout les $r \in]\frac{1}{2}, 1[$).

Donc d'aprés le théorème précedent I converge.

2. Etudier la nature de l'intégrale généralisée $J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

   De la même manière due précedement on a , on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x \to 1} (1-x)^r f(x) = \lim_{x \to 1} (1-x)^{r-\frac{1}{2}} = 0, si, r - \frac{1}{2} > 0$$

   Donc on prend un r qui vérifie a la fois $r - \frac{1}{2} > 0$ et $r < 1$ par exemple $r = \frac{3}{4}$, et donc J converge.

Théorème 5 **:**

Soient a un reel strictement positif , $I = [a, +\infty[$; et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction positive et localement intégrable . On suppose qu'il existe un $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{x \to +\infty} (x)^r f(x) = l \in \mathbb{R}^+$$

Alors on a :

1. *Si $r > 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ converge .*
2. *Si $r \leq 1$ et $l \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ diverge .*

Exemples :

1. Etudier la nature de l'intégrale suivante : $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)e^x}}$.

   On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)e^x}}$ et donc on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^r f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{r-\frac{1}{4}} . \frac{1}{e^{\frac{x}{4}}} = 0$$

   Pour tout r en particulier pour les $r > 1$.

   Donc I converge .

2. Etudier la nature de l'intégrale suivante : $J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}}$

   Comme dans le premier exemple on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^r f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{r-\frac{1}{2}} e^{-x} = 0, si, r - \frac{1}{2} > 0$$

.

Si par exemple $r = 2$ alors on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x} = 0$$

Donc J converge.

Définition 2 :

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable .

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si pour tout $a < c < b$: $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ convergent .

Dans ce cas on écrit tout simplement : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Remarque :

Dans la dérnière équation $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ne depend pas de c , ce qui veut dire que :

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si il existe $a < c < b$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ convergent .

Exemples :

1. Etudier la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
   ici on va prendre $c = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{X \to 1} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{X \to 1} [\arcsin(x)]_0^X = \frac{\pi}{2}$$

   Et

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{Y \to -1} \int_Y^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{Y \to -1} [\arcsin(x)]_Y^0 = \frac{\pi}{2}$$

   Donc I converge et on a : $I = \pi$.

2. Etudier la nature de l'intégrale généralisée $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$
   De la même manière que dans le premier exemple on va prendre $c = 0$ et on a :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{Y \to -\infty} \int_Y^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{Y \to -\infty} [\arctan(t)]_Y^0 = \frac{\pi}{2}$$

Et
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{X\to+\infty} [\arctan(t)]_0^X = \frac{\pi}{2}$$
Donc J converge et on a :$J = \pi$.

Faux probleme : Certaines fonctions présentent des problèmes qui sont "des faux problèmes" dans certain cas et on peut facilement les surmonter .

Proposition :

Soit $I = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction positive et localement intégrable.

Si $\lim_{x\to b} f(x) = l \in \mathbb{R}$; alors la fonction f est prolongeable par continuite en b et donc $\int_a^b f(x)dx$ est convergente.

Exemples :

- Etudier la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_0^1 \frac{sin(t)}{t} dt$
  Il est evident que nous avons a faire a une situation de fau problème en 0 , car $\lim_{t\to 0} \frac{sin(t)}{t} = 1$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuite en 0 et donc I est convergente.
- Etudier la nature de l'intégrale généralisée $J = \int_0^1 \frac{tg(t)}{t} dt$
  De la même manière que dans le premier cas ona $\lim_{t\to 0} \frac{tg(t)}{t} = 1$ et donc J converge.
- Etudier la nature de l'intégrale généralisée $K = \int_0^1 \frac{1-cos(t^2)}{t^2} dt$
  Dans ce cas on a $\lim_{t\to 0} \frac{1-cos(t^2)}{t^2} = \lim_{t\to 0} t^2 \frac{1-cos(t^2)}{t^4} = 0.\frac{1}{2} = 0$
  Donc K est convergente .

Théorème 6 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $I = [a, b[$ et $f; g$ deux fonctions positives et localements intégrables sur I :

On suppose que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b Alors : $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature (c.a.d convergent ou divergent en même temps).

Exemples :

1. Etudier la nature de l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{sin(t)dt}{t\sqrt{t}}$
   Dans ce cas le problème se pose en 0 , et au voisinage de 0 on a :

$$f(t) = \frac{sin(t)}{t\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

Et puisque $\frac{1}{2} < 1$ alors $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$ converge , donc I converge.

2. Etudier la nature de l'intégrale suivante : $J = \int_0^1 \frac{tg(x)}{x^3} dx$
   Dans ce cas la fonction $f(x) = \frac{tg(x)}{x^3} \sim \frac{1}{t^2}$ au voisinage de 0 .
   Et puisque $2 > 1$ alors $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ diverge , donc J diverge .
3. Etudier la nature de l'intégrale suivante : $K = \int_0^{+\infty} \frac{1-cos(x^2)}{x^2\sqrt{x}} dx$
   Pour cette exemple on a deux problemes (en 0 et en $+\infty$) :
   La fonction $h(x) = \frac{1-cos(x^2)}{x^2\sqrt{x}} \sim \frac{2}{t^{\frac{1}{2}}}$ au voisinage de 0 .
   Et puisque $\frac{1}{2} < 1$ alors $\int_0^1 \frac{2}{t^{\frac{1}{2}}} dt$ converge .
   D'autre part $0 \leq h(t) \leq \frac{2}{t^{\frac{5}{2}}}$ pour tout $t \geq 1$ et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^{\frac{5}{2}}} dt$ converge (car $\frac{5}{2} > 1$)donc $\int_1^{+\infty} \frac{1-cos(t^2)}{t^2\sqrt{t}} dt$ converge .
   Et donc pour conclure que $K = \int_0^1 \frac{1-cos(x^2)}{x^2\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1-cos(x^2)}{x^2\sqrt{x}} dx$ converge.

Définition 3 :
Soit $I = (]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b])$ un intérvale quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable .
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente .
L'intérét de cette définition réside dans le fait que tout les critères que nous avons vue concérne les fonctions positives. Et le théorème suivant va nous donner un moyen efficace pour étudier le cas des fonctions non positives.
Théorème 7 :
S*oit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable avec I comme dans la définition précédente alors .*

$$\int_a^b |f(x)|dx, converge \Rightarrow \int_a^b f(x)dx, converge$$

Changement de variable et intégration par partie :

On les appliquent de manière naturelle ou présque ; puisque $\int_a^b f(x)dx$ n'est q'une limite d'intégrales naturelles .

Exemples :

1. Etudier la nature de l'intégrale $I = \int_0^1 cos(\frac{1}{t})dx$

   Dans ce cas le problème ce pose en 0 et on a :$I = \lim_{X \to +\infty} \int_X^1 cos(\frac{1}{t})dt.$

   On note $I(X) = \int_X^1 cos(\frac{1}{t})dt$ et on efféctue le changement de variable suivant :

$$u = \frac{1}{t} \Rightarrow dt = \frac{-1}{u^2}du$$

   Et donc :

$$I(X) = -\int_{\frac{1}{X}}^1 \frac{cos(u)}{u^2}du$$

   Et en fin :

$$I = \lim_{X \to 0^+} -\int_{\frac{1}{X}}^1 \frac{cos(u)}{u^2}du = \lim_{X \to 0^+} \int_1^{\frac{1}{X}} \frac{cos(u)}{u^2}du = \int_1^{+\infty} \frac{cos(u)}{u^2}du$$

   Or $|\frac{cos(u)}{u^2}| \leq \frac{1}{u^2}$ pour tout $u \geq 1$, et donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}du$ converge car $2 > 1$
   Donc $\int_1^{+\infty} |\frac{cos(u)}{u^2}|du$ converge et d'aprés le théorème précédent $\int_1^{+\infty} \frac{cos(u)}{u^2}du$ converge .

2. Etudier la nature de l'intégrale généralisée $J = \int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$
   Dans cette situation le problème se pose en 0 et en $+\infty$
   On a $\lim_{t \to 0} \frac{sin(t)}{t} = 1$ donc la fonction $f(t) = \frac{sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuite en 0 et donc $J_1 = \int_0^1 \frac{sin(t)}{t}dt$ converge .
   D'autre part si on pose $J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt = \lim_{X \to +\infty} \int_1^X \frac{sin(t)}{t}dt$ alors une intégration par partie nous donne.

$$J_2 = \lim_{X \to +\infty} ([\frac{-1}{t}cos(t)]_1^X - \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2}dt)$$

ce qui donne :

$$J = \lim_{X \to +\infty} (cos(1) - \frac{cos(X)}{X} - \int_1^X \frac{cos(t)}{t^2} dt)$$

Et donc$J_2 = cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2} dt$ converge .

Et puisque $J = J_1 + J_2$ alors J converge .

La fonction Γ :

Il s'agit de la fonction suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt$$

Cherchons le domaine de définition de cette fonction :

Pour cela on pose $\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{(x-1)} e^{-t} dt$ et $\Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt$.

Et il est claire que le domaine de définition de Γ est $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_2}$.

Pour Γ_1 le problème se pose en 0 et on a au voisinage de 0 :

$$t^{(x-1)} e^{-t} \sim t^{(x-1)} = \frac{1}{t^{(x-1)}}$$

Et donc $\int_0^1 \frac{1}{t^{(x-1)}} dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$

Donc $\mathcal{D}_{\Gamma_1} =]0, +\infty[$.

Pour Γ_2 ona :

$$\lim_{t \to +\infty} t^r t^{(x-1)} e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{r+x-1}}{e^t} = 0; \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$$

En particulier pour $r \geq 2$, et donc $\mathcal{D}_{\Gamma_2} = \mathbb{R}$

Et donc on conclus que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\Gamma_1} \cap \mathcal{D}_{\Gamma_2} =]0, +\infty[$

Proposition :

Pour tout $x > 1$ on a :

$$\Gamma(x) = (x-1).\Gamma(x-1)$$

démonstration :

On va faire une intégration par partie .

$$\Gamma(x) = \lim_{Y \to +\infty} \int_0^Y t^{(x-1)} e^{-t} dt = \lim_{Y \to +\infty} ([-t^{(x-1)} e^{-t}]_0^Y + (x-1) \int_0^Y t^{(x-2)} e^{-t} dt)$$

Et donc

$$\Gamma(x) = (x-1)\int_0^{+\infty} t^{(x-2)}e^{-t}dt) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

Conséquence :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(n) = n!$$

Démonstration :
En effet on a :

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1).(n-2).\Gamma(n-2) = (n-1).(n-2).(n-3).......2.\Gamma(1)$$

et $\Gamma(1) = 1$

Chapitre 3

Equations différentielles

1. **Définition :**

   On appelle équation différentielle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) toute équation du type :

   $$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \quad \text{(E)}$$

   avec x une variable réelle y la fonction inconnue et $y\prime, y"$, $, y^{(n)}$ ces dérivées succéssives.

   Exemple :

   (a) $xy' + x^2y^2 - 2x = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1

   (b) $yy' + y" = Ln(x)$ est une équation d'ordre 2

   (c) $(1 + x)y' = 1 - y$ est une équation d'ordre 1

   (d) $(1 + x^2)y' + 3xy = 0$ est une équation d'ordre 1

2. **Solution où intégrale :**

   On appelle solution où intégrale sur un intérvale I de $\mathbb{R}$, de l'équation (E). toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; n-fois dérivable telle que :

   $$F(x, f(x); f'(x), f"(x); ..., f^{(n)}(x)) = 0$$

   pour tout $x \in I$

Solution maximale : C'est une solution définie sur un intérvale maximal , c-a-d qu'on ne peut pas prolonger à un intérvalle J contenant I.

3. **Equation du premier ordre :**

   C'est une équation du type : $y' = f(x, y) \qquad (E_1)$

4. **Equation à variables sépparées :**

   C'est une équation du type $y' = f(x)g(y) \qquad (V.S)$

   Où f et g sont des fonctions continues données sur des intérvales I et J

   Exemple :

   (a) $(1 + x^2)y' + 3xy = 0$ ce qui est équivalent à $y' = \frac{-3x}{1+x^2}.y$

   (b) $xy\prime = y + xy$ ce qui est équivalent à $y' = (\frac{1}{x} + 1).y$

   (c) $y'sin(x) = y$ ce qui est équivalent à $y' = \frac{1}{sin(x)}.y$

   Pour résoudre L'équation (VS) ; on l'écrit tout d'abord sous la forme :

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

   et puis on continue la résolution en intégrant les deux cotés de l'équation.

   Exemples :

   (a) Dans l'exemple 1) ona :

$$\frac{dy}{y} = \frac{-3x}{1 + x^2} \Rightarrow ln(|y|) = -\frac{3}{2}ln(1 + x^2) + cont$$

$$\Rightarrow |y| = \pm e^{const}.\frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow y = \frac{K}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

   Avec $K \in \mathbb{R}$

   (b) Dans l'éxemple 2) on a

$$\frac{dy}{y} = (\frac{1}{x} + 1)dx \Rightarrow ln(|y|) = (x + ln(|x|)) + c$$

$$|y| = e^c . |x| \, e^x \Rightarrow y = Kxe^x$$

Avec $K \in \mathbb{R}$

(c) Dans l'exemple 3) on a :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sin(x)} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$
$$\Rightarrow \ln(|y|) = \int \frac{\sin(x)dx}{\sin^2(x)} = \int \frac{\sin(x)dx}{1-\cos^2(x)}$$

Alors un changement de variable $u = cos(x)$ ($du = -sin(x)dx$) :

$$\ln(|y|) = -\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{du}{1-u} + \int \frac{du}{1+u}\right) = \frac{1}{2}ln(\left|\frac{1-u}{1+u}\right|)+c$$

Et donc

$$Y = K.(\frac{1-u}{1+u}) = K.\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

Avec K $\in \mathbb{R}$

5. **Equation homogène** :

Ce sont des équations du genre :

$$y' = f(\tfrac{y}{x}) \quad \text{(H)}$$

Exemples :

(a) $2x^2y' - y^2 = 4xy$

(b) $(4x^2 + 3xy + y^2) + 4(y^2 + 3xy + x^2)y' = 0$

(c) $y^3y' + 3xy^2 + 2x^3 = 0$

(d) $2x + y - (4x - y)y' = 0$

(e) $xyy' - y^2 = (x + y)e^{-\frac{y}{x}}$

Résolution :

On fait un changement de fonction inconue et on pose :

$$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + u'x$$

Donc (H) sera équivalente à :

$$u + u^{'}x = f(u)$$
$$\Leftrightarrow u^{'} = .\tfrac{1}{x}(f(u) - u)$$

qui est une équation a variable séparée

Exemples :

(a) $y\prime = \frac{y^2+4xy}{2x^2} = \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2 + 2(\frac{y}{x})$

donc il s'agi bien d'une équation homogène

donc on pose $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xu \Leftrightarrow y' = u + u^{'}x$

$$\Leftrightarrow u + u^{'}x = \frac{1}{2}u^2 + 2u$$

$$\Leftrightarrow u'x = \frac{1}{2}u^2 + u \Leftrightarrow \frac{2du}{u(u+2)} = \frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{2du}{u(u+2)} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{+du}{u} - \int \frac{du}{(u+2)} = Ln(|x|) + c$$

$$\Leftrightarrow ln(\left|\frac{u}{u+2}\right|) = ln(|x|) + c$$
$$\Leftrightarrow \frac{u}{u+2} = K.x \Leftrightarrow u(1 - Kx) = 2Kx \Leftrightarrow u = \frac{2Kx}{1 - Kx}$$

donc $y = \frac{2Kx^2}{1-Kx}$ Avec K un réel

(b) dans cette équation on a :

$(4x^2 + 3xy + y^2) + 4(y^2 + 3xy + x^2)y' = 0$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{(4x^2 + 3xy + y^2)}{4(y^2 + 3xy + x^2)}$$

$$= -\frac{4+3.\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{4(\left(\frac{y}{x}\right)^2+3(\frac{y}{x})+1)}$$

Donc il s'agit bien d'une équation homogène :

donc on pose $u=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=xu \Leftrightarrow y'=u+u^{'}x$

Et donc $u+u^{'}x = -\frac{4+3.u+u^2}{4(u^2+3u+1)} \Leftrightarrow u'x = -\frac{4+3.u+u^2}{4(u^2+3u+1)} - u = \frac{-4-7u-13u^2-4u^3}{4(u^2+3u+1)}$

(c) Dans l'exemple c) $y^3y'+3xy^2+2x^3=0$

$$(\frac{y}{x})^3y'+3(\frac{y}{x})^2+2=0 \Longleftrightarrow y'=\frac{-2-3(\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x})^3}=f(\frac{y}{x})$$

Il s'agit bien d'une équation homogène

donc on pose $u=\frac{y}{x} \Leftrightarrow y=xu \Leftrightarrow y'=u+u^{'}x$

Et donc

$$u+u^{'}x=\frac{-2-3u^2}{u^3} \Longleftrightarrow u'x=\frac{-2-3u^2-u^4}{u^3} \Longleftrightarrow -\frac{u^3du}{2+3u^2+u^4}=\frac{dx}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \int -\frac{u^3du}{2+3u^2+u^4}=\int\frac{dx}{x}$$

Or $X^2+3X+2=(X+1)(X+2)$

donc $\frac{u^3}{2+3u^2+u^4}=\frac{au+b}{u^2+1}+\frac{cu+d}{u^2+2}$

E t un petit calcule montre que

$a=-1; b=0; c=2; et; d=0$

Donc $ln(|x|)=\frac{-1}{2}ln(1+u^2)+ln(2+u^2)+c=ln(\frac{2+u^2}{\sqrt{1+u^2}})+c$

Et on continue la résolution

6. **Equation linéaire d'ordre 1 :**

Elle est de la forme :

$$a(x)y'+b(x)y=h(x)$$

Avec a, b et h des fonctions continues sur un intérvale donné I.

Exemples :

1) $xy'-y=\frac{x}{x^2-1}$

2) $y'-xy=\sin(x)$

Résolution :

1) On commence par résoudre l'équation sans second membre c.a.d

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$
$$\Leftrightarrow y' = -\tfrac{b(x)}{a(x)}.y$$

Qui est une équation a variable séparée , et on sait la résoudre .

Dans l'exemple 1)

E.S.S.M :est : $xy' - y = 0$ donc .

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow ln(|y|) = ln(|x|) + C$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^C.\,|x|$$

$$\Leftrightarrow y_0 = K.x$$

Avec $K \in \mathbb{R}$ Dans l'exemple 2) ESSM est $y' - xy = 0$

sa résolution sera de la même manière :

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx$$

$$\Leftrightarrow ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow y_0 = K.\exp(\frac{x^2}{2})$$

avec $K \in \mathbb{R}$

Et donc $y_0 = K.U_0$ avec $U_0 = \exp(\frac{x^2}{2})$

7. **Théorème :**

   On considère l'équation linéaire de 1er ordre :

$$a(x)y' + b(x)y = h(x) \qquad (E)$$

   Si y_p est une solution particulière de (E)

   Alors Toute autre solution y de (E) vérifie

$$a(x)(y - y_p)' + b(x)(y - y_p) = 0$$

   Donc $y - y_p$ est une solution de l'équation homogène , donc $y - y_p = y_0$

   Donc

$$y = y_1 + y_0$$

8. **Recherche de y_p** :

   Méthode de la variation de la constante :

   Soit U_0 une solution de l'équation sans second membre .

   On pose $y_p = c(x).u_0$ avec $c(x)$ est une fonction a chércher pour que y_p soit une solution de (E)

   Donc $y\prime_p = c\prime(x)u_0 + c(x).u\prime_0$ puis on remplace dans l'équation (E) et donc on aura :

$$a(x)(c'u0 + cu'0) + b(x)(cuo) = h(x)$$

   Ce qui entraine que :

$$a(x)c'(x)u_o + \underbrace{a(x)c(x)u_o'(x) + b(x)c(x)u_o(x)} = h(x)$$

   Et donc $c'x) = \frac{h(x)}{a(x)u_0(x)}$

   Exemple :

   résoudre l'équation différentielle $xy' - y = \frac{x}{x^2-1}$ (1)

   On commence par résoudre l'équation sans second membre E.S.S.M

   ESSM : $xy' - y = 0$

   $\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow Ln(|y|) = Ln(|x|) + c$
$\Rightarrow y = K.x$
avec $K \in \mathbb{R}$

On pose alors $u_0 = x$

et on va chercher une solution particulière $y_p = c(x).u_0$

On dérive y_p et on remplace dans l'équation (1)

et on obtien $x(c'u_o + cu'_o) - (cu_o) = \frac{x}{x^2-1}$
$\Rightarrow x^2c'(x) = \frac{x}{x^2-1}$
$\Rightarrow c'(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$
$\Rightarrow c(x) = -ln(|x|) + \frac{1}{2}ln(|x^2 - 1|)$
$\Rightarrow y_p = c(x).u_0$
$\Rightarrow y_p = K.x + x(-ln(|x|) + \frac{1}{2}ln(|x^2 - 1|)$
avec $K \in \mathbb{R}$

On va alors donner les solutions sur les intérvales :$]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$

9. **Equation de BERNOULLI** :

C'est une équation du type

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x).y^n \qquad (E)$$

avec $n$un élement de $\mathbb{R}$, $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ des fonctions numèriques données sur un intérvale I.

Exemple :

(a) $y' = y + x^2y^2$ ici $n = 2$

(b) $y\prime = y + y^3$ ici $n = 3$

(c) $y\prime - y = \sqrt{y}$ ici n= $\frac{1}{2}$

Résolution :

1) Si n=1 alors :$y' = \alpha(x)y + \beta(x).y = (\alpha(x) + \beta(x))y$

donc on a une équation a variables séparées

2)Si n$\neq$ 1 l'équation (E) est équivalente a :
$\frac{y'}{y^n} - \frac{\alpha(x)}{y^{n-1}} = \beta(x) \qquad (E_1)$

On pose alors $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$
donc $z'(x) = -(n-1).\frac{y'}{y^n}$
Et on remplace dans l'équation (E_1)
Ce qui nous donne : $-\frac{z'}{(n-1)} - \alpha(x)z = \beta(x)$ qui est une équation linéaire de 1er ordre .

Exemple :
Résoudre l'équation suivante :(E) $\quad y' = y + x^2y^2$
(E) est équivalente a :$\frac{y'}{y} - \frac{1}{y} = x^2$
On pose z=$\frac{1}{y}$, donc $z' = -\frac{y'}{y^2}$ puis on remplace dans l'équation précedente :
et on obtien $z' + z = -x^2$
Et on va résoudre cette équation par :
1) $z'+z = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = -1 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -dx \Rightarrow ln(|z|) = -x+c \Rightarrow z = K.e^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$
On pose alors $z_0 = e^{-x}$
Et on va chercher une solution particulière par la variation de la constante :

$$\begin{aligned} z_p &= c(x).z_0 \\ \Rightarrow z'p &= c'z_0 + cz_0' \\ \Rightarrow c'z_0 + cz_0' + cz_0 &= -x^2 \\ \Rightarrow c'(x) &= -x^2e^x \\ \Rightarrow c(x) &= -\int x^2e^x dx = (-x^2+2x-2)e^x \end{aligned}$$

Donc z_p=$(-x^2+2x-2)e^x.e^{-x} = -x^2+2x-2$
Et donc la solution generale est donner par :
$zg = z_p + Ke^{-x} = -x^2+2x-2+Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$
Et en fin $y_g = \frac{1}{-x^2+2x-2+ke^{-x}}$ Avec $K \in \mathbb{R}$

10. **Equation de RICCATI :**
C'est une équation du type :

$$y' = \alpha(x).y^2 + \beta(x).y + \gamma(x)$$

Avec $\alpha(x)$; $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ des fonctions numériques continues sur un intérvale I

Résolution :

On a besoin de connaitre une solution particulière y_1

On pose alors $z = y - y_1$

11. **Equation de second ordre à coéfficients constants :**

    Ce sont des équations de la forme :

    $$(E) : ay" + by' + cy = f(x)$$

    Avec a,b,c des constantes réelles et f une fonction continue sur un intervale I

    Exemples :

    (a) $y" + 3y' + y = \sin(x)$

    (b) $y" + 3y' + 4y = e^x \cos(x)$

    (c) $2y" + y' - 2y = (x^2 + 3x + 2)e^{2x}$

12. **Equation sans second membre** :

    Il s'agit de l'équation :

    $$(E_0) \qquad : ay" + by' + cy = 0$$

    pour résoudre l'équation E_0, on remarque d'abord que l'ensemble des solution de E_0 est un espace vectoriél de dimention 2

    et que pour chercher sa base on a besoin de l'équation carractéristique :

    Equation carractéristique :

    c'est l'équation de second degré : $ar^2 + br + c = 0 \qquad (E.C)$

    Il ya 3 cas possibles :

    <u>1er **cas :**</u> $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ dans ce cas nous avons deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et alors les solutions de E_0 sont de la forme : $y_{ssm} = \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x)$, avec λ et μ deux réels :

    <u>2eme **cas :**</u>

    $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ dans ce cas l'équation caracteristique admet une seule

solution double $r_1 = r_2 = r$ et dans ce cas les solutions de l'équation sans second membre sont données par la formule :

$$y_{ssm} = (\lambda x + \mu)\exp(r.x)$$

Avec λ et μ deux réels quelconques. <u>3eme **cas :**</u>

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ dans ce cas nous avons deux racines complexes distinctes $z_1 \neq z_2$ avec $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$ et dans ce cas les solutions de l'equation sans second membre sont données par la formule :

$$y_{ssm} = \exp(\alpha x)[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$$

avec A et B deux élements de $\mathbb{R}$
Exemples :
résoudre les équations suivantes :

(a) $y" + 3y' - 4y = 0$

(b) $y" - 4y' + 4y = 0$

(c) $y" + 4y' + 5y = 0$

Pour 1) l'équation caracteristique est : $r^2 + 3r - 4 = 0$ dont le $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$ et donc $r_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$
et donc $y_{ssm} = \lambda\exp(x) + \mu\exp(-4x)$, avec λ et μ deux réels :
pour 2) l'équation caracteristique est : $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont le $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$ et donc $r_1 = r_2 = \frac{4}{2} = 2$
et donc $y_{ssm} = [\lambda x + \mu]\exp(2x)$, avec λ et μ deux réels :
pour 3) l'équation caracteristique est : $r^2 + 4r + 5 = 0$ dont le $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$
Alors $z_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i$ et $z_2 = -2 - i$
Et dans ce cas $y_{ssm} = \exp(-2x)[A\cos(x) + B\sin(x)]$ avec A et B deux élements de $\mathbb{R}$

13. **Recherche d'une solution particulière :**
considerons d'abort l'equation :

$$ay" + by' + cy = e^{\alpha x}.P_n(x)$$

Avec α un réel et P_n un polynôme de degrée n
Dans ce cas on cherche une solution particulière de la forme :

$$Y_p = e^{\alpha x}.x^s.(A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n)$$

Où $A_0, A_1, ...A_n$ des constantes réelles a déterminer .
Et s vérifie :
- $s = 0$ si α n'est pas racine de $E.C$
- $s = 1$ si α est racine simple de $E.C$
- $s = 2$ si α est racine double de $E.C$

Exemple :
Résoudre l'équation differentielle suivante :

$$y" - 3y' - 4y = 6e^{2x} \qquad (1)$$

On commence par résoudre l'équation carracteristique :$r^2 - 3r - 4 = 0$
On a : $\Delta = 9 + 16 = 25$ donc $r_1 = 4$ et $r_2 = -1$ et donc la solution de l'équation sans second membre est :

$$y_{ssm} = \lambda e^{4x} + \mu e^{-x}$$

avec λ et μ deux réels
On cherche ensuite une solution particulière de la forme :

$$Y_p = e^{2x}.x^0.(A) = A.e^{2x}$$

Alors $y'_p = 2Ae^{2x}$ et $y"_p = 4Ae^{2x}$ et on remplace dans l"equation (1)

$$4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 6e^{2x} \Rightarrow -6A = 6 \Rightarrow A = -1$$

Et en fin la solution générale de (1) est :

$$y = y_{ssm} + Y_p = \lambda e^{4x} + \mu e^{-x} - e^{2x}$$

Exemple 2 :
résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y" - 2y' - 3y = -3xe^{-x} \qquad (2)$$

L"equation carracteristique :

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

Et $\Delta = 16$ donc $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$; donc la solution de l'équation sans second membre est donneé par :

$$y_{ssm} = \lambda e^{-x} + \mu e^{3x} \qquad \lambda \ \ et \ \ \mu \ \ \in \mathbb{R}$$

On cherche ensuite une solution particulière de la forme :

$$y_p = e^{-x}.x^s.(A_0 + A_1 x)$$

avec $s = 1$ car -1 est racine simple de l'équation carracteristique .
Et on calcule $y_p' = e^{-x}(A_0 + (2A_1 - A_0)x - A_1 x^2)$ puis $y"_p = e^{-x}(2A_1 - 2A_0 + (A_0 - 4A_1)x + A_1 x^2)$.
Et on remplace dans l'équation (2) :
ce qui nous donne :$A_0 = \frac{3}{16}$ et $A_1 = \frac{3}{8}$.
Ce qui nous donne la solution générale de (2) :

$$y = \lambda e^{-x} + \mu e^{3x} + e^{-x}.x.(\frac{3}{16} + \frac{3}{8}x)$$

Considérons maintenant l'équation différentielle suivante :

$$ay" + by' + cy = e^{\alpha x}.P_n(x)cos(\beta.x)$$

Avec α , β deux réels et P_n un polynôme de degrée n
Dans ce cas on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_p = e^{\alpha x}x^s[Q_n(x)cos(\beta.x) + R_n(x)sin(\beta.x)]$$

Où Q_n et R_n sont des polynôme de degrée n et

- $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation carracteristique .
- $s = 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine de l'équation carracteristique

Exemple 1 :
Résoudre l'équation dioofférentielle suivante :$y" - 3y' - 4y = -8e^x.cos(2x)$ (3)
Equation carractéristique : $r^2 - 3r - 4 = 0$, donc $\Delta = 25$ et $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$ et donc la solution particulière sera de la forme :

$$y_p = e^x.(Acos(2x) + Bsin(2x))$$

On a $s = 0$ car $1 + 2i$ n'est pas une racine de l'équation carracteristique ; et on calcule y'_p et $y"_p$ puis on remplace dans l'équation (3) et on trouve :$A = \frac{3}{17}$ et $B = \frac{-5}{17}$.

Exemple 2 :
Résoudre l'équation différentielle :

$$y" + 2y' + 5y = 4e^{-x}cos(2x) \qquad y(0) = 1 \;\; , \;\; y'(0) = 0$$

L"equation carracteristique est : $r^2 + 2r + 5 = 0$ et son $\Delta = -16 = (4i)^2$ donc les solutions sont $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$
On cherche donc $y_p = (Acos(2x) + Bsin(2x)).x.e^{-x}$ (on a $s = 1$ car $-1+2i$ est racine de l'équation carracteristique) et le réste des calcules est laissé au étudiants .

Remarque :
Pour résoudre une équation du type :

$$ay" + by' + cy = e^{\alpha x}.P_n(x)sin(\beta.x)$$

on procéde de la même manière et la solution particulière sera aussi du type :

$$y_p = e^{\alpha x}x^s[Q_n(x)cos(\beta.x) + R_n(x)sin(\beta.x)]$$

14. **Principe de supérposition :**
Soit l'équation différentielle :

$$ay" + by' + cy = f_1 + f_2 \qquad (E)$$

Où f_1 et f_2 deux fonctions .
Pour chercher une solution particulière de E ; on cherche une solution particulière y_1 de : $ay" + by' + cy = f_1$ et une solution particulièrey_2 de $ay" + by' + cy = f_2$ et alors $y_p = y_1 + y_2$ sera une solution particulière de E.

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y" + y' - 2y = e^x + e^{-2x}$$

tout d'abort on écrit l'équation carracteristique :$r^2 + r - 2 = 0$ et sont $\Delta = 1 + 8 = 9$

Donc $r_1 = -2$ et $r_2 = 1$, donc la solution de l'équation sans second membre est :

$$y_{ssm} = \lambda.e^x + \mu.e^{-2x} \qquad \lambda \ \ et \ \ \mu \in \mathbb{R}$$

Pour chercher une solution particulière de cette équation on cherchera les solutions particulière de $y" + y' - 2y = e^x$ et de $y" + y' - 2y = e^{-2x}$.

- pour la premiere équation $y_1 = A.x.e^x$ $(s = 1)$ car 1 est une racine de l'équation carracteristique et donc $y_1' = (Ax + A)e^x$ et $y_1" = (Ax + 2A)e^x$, et puis on remplace dans l'équation et on trouve : $3A = 1$, donc $A = \frac{1}{3}$

- Pour la deuxieme équation $y_2 = B.x.e^{-2x}$ $(s = 1$ car -2 est une racine de l'équation carracteristique et donc $y_2' = (-2Bx + B)e^{-2x}$ et $y_2" = (4Bx - 4B)e^{-2x}$, et puis on remplace dans l'équation et on trouve :$-3B = 1$, donc $B = -\frac{1}{3}$

Donc $y_p = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{3}xe^{-2x}$; et la solution générale de l'équation est :

$$y_g = y_{ssm} + y_p = \lambda.e^x + \mu.e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{3}xe^{-2x}$$

Avec λet μ deux éléments de $\mathbb{R}$

Chapitre 4

LES EXERCICES

EXERCICES D'INTEGRATION SUR $\mathbb{R}$

1. **EXERCICE** :

   Calculer les limites des suites suivantes :

   (a) $u_n = \frac{1}{n}\left[\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \dots\dots + \sqrt[n]{2^n}\right]$ $\quad u_n \frac{1}{n^3}\left[1\sqrt{1^2+n^2} + 2\sqrt{2^2+n^2}\dots\dots + n\sqrt{n^2+n^2}\right]$

   (b) $v_n = n.[\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \frac{1}{3^2+n^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2+n^2}]$ $\quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

   (c) $w_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})^{\frac{1}{n}}$ $\quad w_n = \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour p entier naturel .

   (d) $k_n = \frac{1}{n}.\sum_{p=0}^{n-1}\frac{p}{\sqrt{n^2+p^2}}$ $\quad k_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^p$ $\quad k_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$

   (e) $r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p\sqrt[n]{e^p}$ $\quad r_n = \frac{1}{n}\left[\arctan(\frac{1-n}{1+n}) + \arctan(\frac{k-n}{k+n}) + \dots . + \arctan(\frac{n-n}{n+n})\right]$

   (f) $z_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{2[\ln(p+n)-\ln(n)]+5}{p+n}$ $\quad z_n = \frac{1}{n}\left[\arcsin(\frac{1-n}{1+n}) + \arcsin(\frac{k-n}{k+n}) + \dots\dots + \arcsin(\frac{n-n}{n+n})\right]$

   (g) $s_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(n+p)(1+\ln(p+n)-\ln(n))}$ $\quad s_n = n.\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{k}{n}}}{k^2}$

   (h) $\alpha_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

2. **EXERCICE :**

   Soit f une fonction continue sur [0 ;1] on pose

   $$Un = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{2k-1}{2n}) \quad \text{, pour } n \geq 1$$

   Calculer la limite de cette suite

3. **EXERCICE :**

   Calculer les primitives suivantes :

   (a) $\int \cos(x)e^x dx$ 4) $\int x\cos(\alpha x)dx$

   (b) $\int \frac{Ln(x)}{x}dx$ 5) $\int \sin(3x)\cos(4x)dx$

   (c) $\int x^2\cos(x)dx$ 6) $\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$

4. **EXERCICE** :

   On pose $I = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$ et $J = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx$

   (a) Calculer $I+J$ et $I-J$

   (b) Endéduire I et J

5. **EXERCICE :**

   Calculer les integrales et primitives suivantes :

   (a) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}dx$ $\int_4^9 (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

   (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$ $\int Arc\sin(x)dx$

   (c) $\int xtg^2(x)dx$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+Ln(x)}}$

6. **EXERCICE :** Calculer les integrales et primitives suivantes :

   (a) $\int \frac{e^{Arctg(x)}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ $\int \frac{\sin(x)dx}{\cos(x)(1+\cos^2(x))}$

   (b) 3) $\int \frac{dx}{\sin(x)}$ $\int_1^e x^n Ln(x)dx$

   (c) 5) $\int_1^2 Ln(x+\sqrt{x^2+1})dx,$ $\int_{-1}^1 (Arc\cos(x))^2dx$

7. **EXERCICE** :

   Trouver une relation de récurence pérmettant de calculer l'intégrale suivante :

   $$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

8. **EXERCICE :** On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n(x)dx$ pour $n \in \mathbb{N}$
   (a) Trouver une relation I_n et I_{n+2}
   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

9. **EXERCICE :**

   Soit $J_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$; $n \in \mathbb{N}$
   (a) trouver une relation entre J_n et ; J_{n+2}
   (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2.J_n$

10. **EXERCICE :**

    1) Décomposer en élements simples la fonction $f(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}$

    2) Endéduire $\int \frac{tLn(t)dt}{(1+t^2)^2}$

11. **EXERCICE :**
    (a) Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle : $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2(2+x)}$
    (b) En déduire une primitive de la fraction rationnelle $g(t) = \frac{t^4}{(1+t^2)^2(2+t^2)}$
    (c) Calculer alors l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4(x)dx}{1+\cos^2(x)}$

12. **EXERCICE :**

    a) Décomposer enélements simples :les fractions rationnelles suivantes :
    (a) $f(x) = \frac{1+mx}{(1+x^2)(x-m)}$, ou $m \in \mathbb{R}^{*+}$
    (b) $g(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}$

    b)Calculer Alors $I(x) = \int_x^0 f(t)dt$ avec $x < 0$ et $J(s) = \int_0^s \frac{e^t}{(1+e^t)(1+e^{2t})}dt$

    c) Calculer les limites suivantes :

    $$\lim_{X \to -\infty} I(X) \qquad et \qquad \lim_{s \to +\infty} J(s)$$

13. **EXERCICE** :

    En utilisant le changement de variable $x = \cos(t)$ calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x.\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

14. **EXERCICE** :

    Soit $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée intégrable et

    vérifiant :pour tout

    $$x \in [a,b], f(a+b-x) = f(x)$$

    1) Montrer que $\displaystyle\int_a^b x.f(x)dx = \frac{a+b}{2}.\int_a^b f(x)dx$

    2) Application :

    Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin(x)}dx$

15. **EXERCICE :**

    Soit $f(x) = \frac{x+2}{x^3(x+1)}$.

    1) Donner la décomposition en éléments simple de f et calculer $\displaystyle\int f(x)dx$.

    2) On pose $g(x) = \frac{x^2+2}{x^6(x^2+1)}$, en déduire $\displaystyle\int g(x)dx$

16. **EXERCICE :**

    Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, un réel , et $f(x) = \frac{\alpha x+3}{x^2(x+1)}$

    1) Décomposer f en éléments simples dans$\mathbb{R}[X]$.

    2) Calculer $F_\alpha = \displaystyle\int f(x)dx$

    3) Pour quels valeurs de α , $F_\alpha(x)$ est une fraction rationnelle .

    4) On suppose que $\alpha = 2$, calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

17. **EXERCICE :**

    Soit $f(x) = \frac{x+\beta}{x^2(x+1)}$, ou β est un réel donné ,

    1) Décomposer f en élements simples .

    2) Calculer $G_\beta = \displaystyle\int f(x)dx$

    3) Pour quels valeurs de β , G_β est une fraction rationnelle .

    4) On suppose que $\beta = 2$, calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

18. **EXERCICE :**

    Calculer les integrales suivants :

    $\int_0^1 \frac{tdt}{1+t^4}$; 2) $\int_0^e x^n \ln(x)dx$, 3) $\int_0^1 (x^2+3x+1)e^x dx$; 4)

19. **EXERCICE :**

    Calculer par parties les intégrales ou primitives suivantes :

    (a) $I = \int_{-1}^{1} (x^2+5x+6)\cos(2x)dx$ $\quad J = \int \sin(\ln(x))dx$

    (b) $K = \int \frac{x\ln(x)dx}{(1+x^2)^2}$ $\quad L = \int e^x \cos(2x)dx$

20. **EXERCICE :**

    calculer les intégrales et primitives suivantes :

    (a) $I_1 = \int \frac{dx}{1+\cos(x)}$ $\quad I_2 = \int \frac{2+\sin(x)}{3+\sin(x)+\cos(x)}dx$

    (b) $J_1 = \int \frac{\cos^2(x)dx}{2+\sin(x)}$ $\quad J_2 = \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2-4}dx$

    (c) $K_1 = \int \frac{x}{\sqrt[3]{\frac{1+x}{2+x}}}dx$

21. **EXERCICE :** Soit $G(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4}dt$

    (a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$

    (b) Montrer que $\sqrt{1+t^4} \geq t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

    (c) En déduire les limites suivantes :

    $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x^2}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x^3}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x^4}$
    $\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x^5}$

22. **EXERCICE :** Soit $H(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}dt$

    (a) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$

    (b) Montrer que $0 \leq H'(x) \leq \frac{1}{2x^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

    (c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} H(x)$

23. **EXERCICE :** Soit $F(x) = \int_{1+x}^{x^2+x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

(a) Calculer $F(1)$

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F\prime(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_{1+x}^{x^2+x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

24. **EXERCICE :** Soit $h(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt$ définie sur $]0,+\infty[$

(a) Calculer $h(1)$

(b) Montrer que h est dérivable sur Iet calculer $h'(x)$ pour tout $x \in I$

(c) En déduire $h(x)$pour $x \in I$

25. **EXERCICE :** On considère por $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $J_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

(a) calculer $J_0; J_1;$et J_2

(b) Etablir une relation de récurence entre J_{n+1} et J_n . En déduire J_3 et J_4

26. **EXERCICE :** Calculer $I = \int \cos(x)e^x dx$ et en déduire

$$J = \int \frac{e^{Arctg(t)}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$$

27. **EXERCICE :** calculer les primitives suivantes :

(a) $A = \int \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt[3]{t})}$

(b) $B = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$

(c) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}dx$

28. **EXERCICE** On pose $I_n = \int\limits_0^1 t^n\sqrt{1+t}dt$

(a) Calculer I_0 et $,I_1$

(b) Comparer t^n et t^{n+1} pour $0 \leq t \leq 1$ et en déduire la monotonie de la suite I_n

(c) Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

(d) Montrer que pour tous t $\in [0;1]$: $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

(e) En déduire alors que $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et calculer la limite de $I_n$et nI_n

29. **EXERCICE :**On pose $In = \int\limits_1^e x(\ln(x)^n dx$ pour $n \in \mathbb{N}$

(a) Calculer I_0 et I_1

(b) Trouver une relation de recurence entre $I_n$et I_{n+1}

(c) Montrer que In est décroissante et que $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

(d) Calculer limite de I_n et nI_n

30. **EXERCICE :** Calculer les primitives suivantes :

(a) $I = \int_0^1 \frac{tdt}{1+t^4}$ $J = \int \sin(Ln(x))dx$

(b) $K = \int \frac{dx}{\sin(x)} ... L = \int \frac{dx}{xLn(x)}$

(c) $F = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2} dx$

31. **EXERCICE :**
On pose $I_n = \int_1^n e^{-t^2} dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
1) Montrer que la suite $I_n$est croissante
2) montrer que $I_n \leq \int_1^n te^{-t^2} dt$
3) En déduire un majorant de I_n et la convergence de la suite I_n

32. **EXERCICE** :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F\prime(x)$

2) Montrer que F est constante si et seulement si f est périodique de periode $T = 2$

3) Envisager le cas $f(x) = cos(\pi x)$

33. **EXERCICE**

1) Décomposer en élements simples la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

2) Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x3+1} \quad ; \quad \int \frac{x^3 dx}{x3+1}$$

3) Calculer la primitive $\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$

34. **EXERCICE** :

Calculer les primitives suivantes :

1) $I = \int_0^1 x\sqrt{-x^2+2x}dx$ (on posera $t = arcsin(x-1)$)

2) $J = \int_{-1}^1 |e^x - 1| \frac{dx}{e^x+1}$

35. **EXERCICE** :

Soit F_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-6\pi}^{-4\pi} (\cos(t))^n e^{x.\cos(t)} dt$$

1) Motrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \ ; F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(t))^n e^{x.\cos(t)} dt$

2) a) Ecrire $F_n(0)$ et en integrant par partie trouver une relation de recurence entre

$F_n(0)$ et $F_{n-2}(0)$, pour $n \geq 2$.

b) En deduire la valeur de $F_{2n}(0)$ et celle de $F_{2(n+1)}(0)$ por tout $n \geq 0$

3) On suppose que por tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \geq 0$, $F'_n(x) = F_{n+1}(x)$.

($F\prime_n$ désigne la fonction dérivée de F_n)

4) Exprimer $F_0^{(\mathbf{k})}$ en fonction de F_k pour tout $k \geq 1$

5) En déduire le développement limité à l'ordre 7 de la fonction F_0 au voisinage de 0

36. **EXERCICE** :
Soit In= $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$
   (a) En majorant la fonction integrée , montrer que I_n tend vers zéro
   (b) Calculer $I_n + I_{n+1}$
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

37. **EXERCICE** :
Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$
   (a) Etablir une relation de récurence entre I_n et I_{n+1}
   (b) Calculer I_n
   (c) En déduire $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}.n^k$

38. **EXERCICE :**
Soit $I_{\mathbf{n}} = \int_0^1 t^n e^t dt$
   (a) Calculer $I_0, I_1, I_2\ I_3, I_4$.
   (b) Etudier la suite $I_{\mathbf{n}}$

39. **EXERCICE** :
Soient $I = \int_0^{\pi} x\cos^2(x)dx$ et $J = \int_0^{\pi} x\sin^2(x)dx$
   (a) Calculer $I + J$
   (b) Calculer $I - J$
   (c) En déduire I et J .

40. **EXERCICE** : On pose pour $p, q \in \mathbb{N}$:$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$
   (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}; \forall q \in \mathbb{N}^*; I_{p,q} = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$.
   (b) En deduire que : $\forall p, q \in \mathbb{N}, I_{p;q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$
   (c) Montrer que :$\forall p, q \in \mathbb{N}; \sum_{k=0}^{q}\frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

41. **EXERCICE** :

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ on pose :

$$I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt \qquad J_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)dt$$

Montrer que I_n et J_n tendeent vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$

42. **EXERCICE :**

I] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

On définie la fonction G de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

1] Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$

2]Montrer qu'on a :

$$G'(x) = v'(x).f(v(x)) - u'(x).f(u(x))$$

II] Soit f et F les fonctions définies par :

$$f(t) = t^4e^{-4t^4} \qquad \text{et} \qquad F(x) = \int_x^{1+x^2} f(t)dt$$

(a) i. Donner le domaine d'étude D_E de f et dresser son tableau de variation sur D_E

   ii. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \frac{1}{4e}$

   i. Calculer la fonction dérivée F' de F

   ii. En déduire que $\forall x \in [0,1] : |F'(x)| \leq \frac{3}{4e}$

(b) Montre que $\forall x \in [0,1] : 0 \leq F(x) < 1$

(c) On considérant la fonction $g(x) = F(x) - x$ montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $F(x_0) = x_0$

(d) Soit u_n la suite définie par : $u_0 = 0; ..et; ..u_{n+1} = f(u_n)$

   i. Montrer que $u_n \in [0,1]$

ii. En utilisant le théoréme des Accroissement finis entre u_{n-1} et x_0 , montrer que
$|u_n - x_0| \leq \frac{3}{4e} |u_{n-1} - x_0|$

iii. En déduire que u_n converge vers x_0

43. **EXERCICE :** Calculer les primitive suivantes :
   (a) $I = \int \frac{dx}{\sin^5(x)}$
   (b) $J = \int \frac{\sin^3(x)dx}{(\cos^2(x)+1)^3}$
   (c) $K = \int \frac{dx}{\cos(x)+\sin(x)}$

44. **EXERCICE** :
   Calculer les primitive suivantes :
   (a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x^3-8x}} dx$
   (b) $\int \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt[3]{t+1}} dt$
   (c) $\int t\sqrt{\frac{t-2}{t+2}} dt$
   (d) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
   (e) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx$

45. **EXERCICE** :
   Calculer les primitive suivantes on utilisant un changement de variable :
   (a) $I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$
   (b) $I_2 = \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
   (c) $I_3 = \int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2}$
   (d) $I_4 = \int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x} dx$
   (e) $I_5 = \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$
   (f) $I_6 = \int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$

46. **EXERCICE** :

Calculer les intégrales et primitives suivantes on utilisant une integration par partie :
1) $I1 = \int t\sin(2t)dt$ 2) $I2 = \int \frac{tdt}{\sqrt{1+t}}$ 3) $I3 = \int arcsin(t)dt$ 4) $I4 = \int_{-1}^{1} e^t \cos^2(t)dt5)$ $I5 = \int \sin(\ln(t))dt$ 6) $I6\int_0^1 t^2 e^t dt$

47. **EXERCICE** :

Calculer les integrales et primitives des fractions rationnelles suivantes :
$I_1 = \int_0^1 \int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx$ 3) $I_3 = \int \frac{x^3-x^2+2}{(x-2)(x-3)}dx$ 4) $I_4 = \int \frac{x^6+2x^5-x^4-3x^3-1}{x^3(x+1)^2}dx5)$ $I_5 = \int \frac{(x-1)^5}{(x^2+1)(x+3)^2}dx$ 6) $I_6 = \int \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx$ 7) $I_7 = \int \frac{x^4+1}{x^3-x}dx$ 8) $I_8 = \int \frac{x^2-x-6}{x^4-16}dx$

48. **EXERCICE** :

(a) Justifier la définition de l'application I de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2cos(\theta).x + 1)d\theta.$$

(b) Montrer que I est paire .

(c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$; décomposer le polynôme $x^4 - 2cos(\theta).x^2 + 1$ en produit de polynomes irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$calculer $I(x2)$ en fonction de $I(x)$; puis $I(x^{2^n})$ en fonction de $I(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(e) Déduire des résultats précedents la valeur de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$.

(f) Aprés avoir calculer $I(\frac{1}{x})$; détérminer la valeur de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R}, |x| > 1$

(g) Retrouver les résultats de 5) et 6) directement a l'aide des sommes de Riemann.

INTEGRALES GENERALISEES

1. **EXERCICE :**

   Etudier la nature des intégrales suivantes à partir de la définition et les calculer éventuellement :
   - $\int_0^1 \frac{1}{1-t^2} dt \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)}$
   - $\int_0^1 \frac{1}{t\ln(t)} dt \qquad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$
   - $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \qquad (a \in \mathbb{R}) \qquad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

2. **EXERCICE :**

   Etudier la nature des intégrale suivantes :

   1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(x))}{x^{\frac{7}{3}}} dx$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$ 3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+3x^4} dx$

   4) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$ 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$

3. **EXERCICE :**

   Etudier la nature des intégrales suivantes en déterminant les limites corréspondants :

   1) $\int_0^1 Ln(t) dt$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg(t) dt$ 3) $\int_0^1 \frac{Ln(t)}{(1+t)^2} dt$

   4) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ 5) $\int_1^{+\infty} arctg(\frac{1}{t}) dt$

4. **EXERCICE :**

   1) Motrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \cos(t) \cos(\frac{1}{t}) dt$ est absolument convergente .

   2) En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin(\frac{1}{t}) dt$

5. **EXERCICE 5 :**

   En utilisant la définition , montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leurs valeurs :

   $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+1} \qquad$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)}$

6. **EXERCICE :**

   Etudier la convergence des integrales suivantes :

   1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$ 2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}dt$ 3) $\int_{0}^{1} \frac{t-1}{\ln(t)}dt$

   4) $\int_{0}^{1} \frac{dt}{1-\sqrt{t}}dt$ 5) $\int_{0}^{1} \frac{dt}{\arccos(t)}$

7. **EXERCICE :**

   Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

   et calculer leurs valeurs le cas échéant :

   $I_{\mathbf{1}} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x\sqrt{x-1}}}$, $I_{\mathbf{2}} = \int_{0}^{1} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x(1+x^2)}}$; $I_3 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mathbf{e}^x+1}}$

8. **EXERCICE :**

   Soit l'intégrale $I_1 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$

   1) Montrer que $I_{\mathbf{1}}$ est convergente (le calcule de $I_{\mathbf{1}}$ n'est pas demandé)

   2) a) Effectuer la decomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+t^3}}$

   (rappel : $1 + t^3 = (1 + t)(1 - t + t^2)$).

   b) Soit $x > 0$. Calculer $\int_{0}^{x} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+t^3}}dt$ c) Endéduire la valeur de $I_{\mathbf{1}}$

   3) On considere l'integrale $I_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^2}$

   Etablire une relation entre $I_{\mathbf{1}}$ et $I_{\mathbf{2}}$ permettant d'exprimer $I_{\mathbf{2}}$ en fonction de $I_{\mathbf{1}}$

   4) Soit $I_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$; avec n un entier non nul .

   Montrer que $I_{\mathbf{n}}$ est convergente

   5) montrer que $I_{n+1} \leq I_n$ pour tout n

   6) Montrer que l'on a : $0 \leq I_n \leq \frac{I_1}{\sqrt[3]{n}}$ pour tout $n \geq 1$

   7) Déduire de ce qui précéde que la suite $I_{\mathbf{n}}$ est convergente et calculer sa limite

   8) Etablire une relation entre $I_{\mathbf{n}}$ et $I_{\mathbf{n+1}}$. En déduire l'expréssion de $I_{\mathbf{n+1}}$ en

   fonction de $I_{\mathbf{1}}$.

9. **EXERCICE**

   Calculer les intégrales géneralisées suivantes :

   (a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin(t)}$ $\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{tg(t)}dt$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{3tg(t)+2}$ $\qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)Ln(tg(t))dt$

10. **EXERCICE**

    Calculer les intégrales suivantes :

    (a) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2}$ $\qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^4}$

    (b) $\int_0^{+\infty} \frac{2t^2+1dt}{(1+t^2)^2}$ $\qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ $\qquad \int_0^{+\infty} \frac{t^2dt}{1+t^4}$

    (c) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^6(1+t^{10})}$

11. **EXERCICE**

    Calculer les intégrales suivantes :

    (a) $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$

    (b) $\int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$

    (c) $\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt$

    (d) $\int_0^1 \frac{Ln(1-t^2)dt}{t^2}$

    (e) $\int_0^1 \frac{Ln(t)dt}{\sqrt{1-t}}$

    (f) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3Ln(t)}{(1+t^4)^3}dt$

12. **EXERCICE**

    Calculer les intégrales suivantes :

    (a) $\int_0^{+\infty} Ln(1+\frac{a^2}{t^2})dt$

    (b) $\int_0^{+\infty} Ln(\left|\frac{1+t}{1-t}\right|)\frac{tdt}{(a^2+t^2)^2}$

    (c) $\int_0^{+\infty} \frac{Ln(t)dt}{1+t^2}$

(d) $\int_0^1 \frac{Ln(t)dt}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}$

(e) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. **EXERCICE**
   On considere l'équation différentielle : $(E) : x(x-1)y' + y = x$.
   1) Determiner les solutions définies réspectivement sur chacun des intérvalles :
   $$I_1 =]-\infty, 0[; I_2 =]0, 1[; I_3 =]1, +\infty[$$
   2) Montrer qu'il existe une infinité de solutions définies sur $I_1 =]-\infty, 0[$.
   3) Montrer qu'il existe une et une seule solution définie sur $\mathbb{R}$

2. **EXERCICE**
   Intégrer l'équation (en précisant les intérvallles de définitions maximales.)
   $$(x^2 + 4x - 5)y' - 3(x + y) = (x + 5)^3$$

3. **EXERCICE**
   Intégrer l'équation différentielle : $(1 + x^2)y' + xy + x^2 = 0$

4. **EXERCICE**
   Intégrer les équations différentielles suivantes :
   (1) $y'sin^2(x) - ytg(x) = tg(x)$
   (2) $y" + y' + y = xsin(x) - cos(x)$

5. **EXERCICE**
   On considère l'équation différentielle suiante :
   $$(E) : 2(x-1)y' + y = sin(2x) + x^2$$
   1) Résoudre (E) sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (on laissera les solutions sous forme intégrale).
   2) Soit φ la solution de (E) telle que $\varphi(0) = 0$. montrer que pour tout

$n \geq 4$ on a :

$$2(x-1)\varphi^n(x) + (2x-1)\varphi^{n-1}(x) = 2^{n-1}sin(2x + (n-1).\frac{\pi}{2})$$

3) En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$ et donner le dévelloppement limite de ϕ a l'ordre 5 au voisinage de 0.

6. **EXERCICE**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y" - (4x-1)y' + (4x^2 - 2x)y = 0$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = y(x).e^{(-\lambda.x)}$

a) Ecrire l'équation (E_λ) que doit vérifier u , sous la forme :

$$(E_\lambda) : u" + A(x)u' + B(x)u = 0$$

ou $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynomes en x .

b) Ecrire l'équation (E_0) : que remarquez vous .

c) Montrer que l'on peut choisir λ pour que $B(x)$ soit de degré strictement < 2 et résoudre l'équation corréspondante .

d) Donner les solutions de (E).

.

.

7. **EXERCICE**

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1) $(x^2 - x)y' = y^2 + y$ 2) $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$ 3) $y' = xe^x y$
4) $xy' = y' + xcos^2(\frac{y}{x})$ 5) $y' + ytg(x) - sin(2x) = 0$ 6) $xy' + y - y^2 Ln(x) = 0$

8. **EXERCICE**

Résoudre l'équation différentielle : $|x|y' + y = x^2$.

a) Montrer qu'il existe une infinité de fonctions définie et contiues sur

la droite réelle qui pour $x < 0$ et $x > 0$ sont solutions de l'équation différentielle .
b) Montrer qu'il existe une seule qui est dérivable en 0.

9. **EXERCICE**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' - \frac{y}{y^3-1} = 0$
(b) $y' + \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{x^3}$
(c) $xy'(2y-x) - y^2 = 0$
(d) $y' - y = xy^2$

10. **EXERCICE**
Soit (E) l'équation différentielle de Bernouilli définie par :

$$y' + 2y = y^2(2x^2+3) \qquad (E)$$

(a) Résoudre (E)
(b) Donner la solution particulière y_p vérifiant $y_p(0) = 1$
(c) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de y_p.
(d) En deduire l'équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à celle-ci .

11. **EXERCICE**
Intégrer les équations différentielles suivantes en séparant les variables :
- $y' = e^{x+y}$
- $y'\sqrt{1-x^2} + y^2$
- $xy' + 2y = xyy'$
- $x(1-y^2)y' + y(1-x^2) = 0$

12. **EXERCICE** Intégrer les équations différentielles linéaires suivantes :
(a) *) $y' = x + y$ *) $xy' = 2y + x$

(b) *) $xy' - y = Ln(x)$ *) $y' - ycos(x) = sin(2x)$

(c) *) $x(y' - y) = e^x$ *) $y' + ycotg(x) = e^{cos(x)}$ avec $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

13. **EXERCICE**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' = (x + y + 1)^2$

(b) $y' = \sqrt{y - 2x + 3} + 2$

(c) $y' = tg^2(x + y)$

14. **EXERCICE**

Résoudre les équations différentielles suivantes(a et m sont des paramétres réels) :

- $y" - 2y' + (1 - a)y = 0$
- $y" - 3y' + 2y = x^3$
- $y" + y' + y = cos(mx)$

15. **EXERCICE**

Resoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

- $y" + 2y' + y = 2x^2e^x + e^{-x}$
- $y" - 2y = xe^{2x} - 2xe^x$
- $y" - 2y' + y = x + xe^{-x}$
- $y" + 2y' + y = e^{-x}sin^2(x)$

16. **EXERCICE**

Soit $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

a) Calculer $\frac{1}{2}.\varphi" + 2\varphi' + \varphi$.

b) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{2}.y" + 2y' + y = 1 + \frac{7}{2}xe^x + \frac{(x-1)^2}{x^3}$$

17. **EXERCICE**

On considére l'équation différentielle suivante :

$$y" - 2y' + y = \frac{xe^x}{1 + x^2} \qquad (E)$$

On pose $z(x) = y(x)e^{-x}$

a) Ecrire l'équation différentielle que vérifiera z si y est solution de (E).

b) Résoudre l'équation vérifier par z.

c) En déduire les solutions de (E).

18. **EXERCICE**

On considere l'équation différentielle suivante :

$$(F) \qquad (1+x^2)y" + 4xy' + (1-x^2)y = 0$$

On posant $z(x) = (1+x^2)y(x)$ résoudre l'équation (F)

19. **EXERCICE**

Considerons l'equation differentielle suivante :

$$(1) : y' - \frac{y}{x} - y^2 = -4x^2$$

1) Verifier que la foncyion $y_0 = 2x$ est solution de l'equation (1).

2) Montrer que $y = y0+z$ est solution de l'equation (1) si est seulement si z est solution de l'equation differentielle :

$$(2) \qquad z' - (\frac{1}{x} + 4x)z - z^2 = 0$$

3) resoudre l'equation (2) .

4) En deduire les solutions de (1) .

20. **EXERCICE**

Resoudre les equations differentielles suivantes :

(a) $y' = y(1+y)$.

(b) $y' = sin(x).sin(y)$.

(c) $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.

(d) $1 + xy = e^y$ avec condition initiale $y(1) = 1$.